695. 二次微分方程式ト積分方程式トノ關係(IV)

亀田 豊治朗(保險院)

第四節 對稱核ノ方程式

1. 積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_{a(c)}^{x}K(x,t)\,G(t)\,u(t)\,dt$$

$$+\int_{a(c)}^{b}\left\{y_1^0(x)\,\alpha(t)+y_2^0(x)\,\beta(t)\right\}u(t)\,dt \cdots (8')$$

ハ之レヲ変形シ、且ツ α, β トシテ適當ナ函數ヲ取ルコトニヨリ對稱核ヲ有スル方程式トスルコトが出來ル。

(8)ノ両辺ニ $\dfrac{\sqrt{G(x)}}{b(x)}$ ヲ乗ジ且ツ

$$K(x,t)=\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\frac{b(x)}{b(t)}$$

ヲ代入スレバ

$$\frac{\sqrt{G(x)}\,u(x)}{b(x)}=\frac{\sqrt{G(x)}\,f(x)}{b(x)}$$

$$+\int_a^x\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)\,G(t)}\,\frac{\sqrt{G(t)}\,u(t)}{b(t)}\,dt$$

$$+\int_a^b\left\{\mathring{\eta}_1(x)\sqrt{G(x)}\,\alpha(t)+\mathring{\eta}_2(x)\sqrt{G(x)}\,\beta(t)\right\}u(t)\,dt \text{------} (1)$$

ヲ得ル。今(1)ニ於テ

$$v(x)=\frac{\sqrt{G(x)}\,u(x)}{b(x)}, \qquad g(x)=\frac{\sqrt{G(x)}\,f(x)}{b(x)}$$

ト置ケバ、(1)ハ次ノ如クナル。

$$v(x)=g(x)+\int_a^x\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}\,v(t)\,dt$$

$$+\int_a^b\left\{\mathring{\eta}_1(x)\sqrt{G(x)}\,\frac{\alpha(t)\,b(t)}{\sqrt{G(t)}}+\mathring{\eta}_2(x)\sqrt{G(x)}\,\frac{\beta(t)\,b(t)}{\sqrt{G(t)}}\right\}v(t)\,dt$$

$$\text{------} (2)$$

サテ A_1, A_2, A_3 ヲ常數トスレバ、次ノ積分方程式ノ核ハ對稱デアル。

$$v(x)=g(x)+\int_a^x\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}\ v(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}\ v(t)\,dt$$

$$+\int_a^b\Big[A_1\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)+\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}+A_2\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_1(t)$$

$$+A_3\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_2(t)\Big]\sqrt{G(x)G(t)}\ v(t)\,dt \cdots\cdots(3)$$

之ヲ証スルニハ

$$\int_a^x\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}\cdot v(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}\ v(t)\,dt$$

ノ核ガ對稱デアルコトヲ証スレバ充分デアル。今簡單ノタメ此ノ核ヲ $k(x,t)$ デ表ハセバ此ノ核ハ次ノ性質ヲ有スル。

1) t ガ a ト x トノ間ニアルトキ，換言スレバ x ガ t ト b トノ間ニアルトキ

$$k(x,t)=\frac{1}{2}\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}$$

2) t ガ x ト b トノ間ニアルトキ

$$k(x,t)=-\frac{1}{2}\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}$$

サテコノ核ニ於テ x ト t トヲ交換スレバ，1) ト 2) トガ交換サレルノミデ $k(x,t)$ ハ不変デアル。故ニ核 $k(x,t)$ ハ對稱デアル。

茲ニ注意ヲ要スルコトハ積分ハ曲線C上デ為サレルノデアルカラ、t ガ a ト x トノ間ニアルトハ，曲線C上ニ於イテ

三点 a, t, x ガ此順序ニアルコトヲ意味スル。

サテ (2) ト (3) トヲ比較スレバ, (2) ノ核ガ対称ナルタメニ充分ナル條件ハ

$$\alpha(t)=\left\{\left(A_1-\frac{1}{2}\right)\mathring{\eta}_2(t)+A_2\mathring{\eta}_1(t)\right\}\frac{G(t)}{b(t)} \tag{4}$$

$$\beta(t)=\left\{\left(A_1+\frac{1}{2}\right)\mathring{\eta}_1(t)+A_3\mathring{\eta}_2(t)\right\}\frac{G(t)}{b(t)} \tag{5}$$

デアル。之ヲ定理デ表ハセバ

定理 8. 積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_{a\,(c)}^{x}K(x,t)G(t)u(t)\,dt$$

$$+\int_a^b\left[\mathring{y}_1(x)\left\{\left(A_1-\frac{1}{2}\right)\mathring{\eta}_2(t)+A_2\mathring{\eta}_1(t)\right\}\right.$$

$$\left.+\mathring{y}_2(x)\left\{\left(A_1+\frac{1}{2}\right)\mathring{\eta}_1(t)+A_3\mathring{\eta}_2(t)\right\}\right]\frac{G(t)}{b(t)}u(t)\,dt \tag{6}$$

ハ両辺ニ $\dfrac{\sqrt{G(x)}}{b(x)}$ ヲ乗ジ且ツ

$$u(x)=\frac{b(x)}{\sqrt{G(x)}}\,v(x)$$

ト置クコトニヨリ対称核ノ積分方程式 (3) トナル。

2. 定理 8 ニ述ベタ通リ方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^x K(x,t)\,G(t)\,u(t)\,dt$$

$$+\int_a^b\left\{\mathring{y}_1(x)\,\alpha(t)+\mathring{y}_2(x)\,\beta(t)\right\}u(t)\,dt$$

ハ，$\alpha(t)$ 及ビ $\beta(t)$ ガ (4), (5) デ表ハサレルトキ，$u=\frac{b}{\sqrt{G}}$ ひト置クコトニ依リ、對稱核ノ積分方程式ニ reduce 出來ルノデアルが、コノ場合ニ定理 7 ニ述ベタ

$$D=\begin{vmatrix} (\alpha \mathring{z}_1)-1 & (\beta \mathring{z}_1) \\ (\alpha \mathring{z}_2) & (\beta \mathring{z}_2)-1 \end{vmatrix}$$

ハ如何ナル函数デアルカ、以下之ヲ論ズル。

(4) ニ依レバ

$$(\alpha \mathring{z}_1)=\left(A_1-\frac{1}{2}\right)\int_a^b \mathring{\eta}_2(t)\mathring{\zeta}_1(t)G(t)\,dt+A_2\int_a^b \mathring{\eta}_1(t)\mathring{\zeta}_1(t)G(t)\,dt$$

$$(\alpha \mathring{z}_2)=\left(A_1-\frac{1}{2}\right)\int_a^b \mathring{\eta}_2(t)\mathring{\zeta}_2(t)G(t)\,dt+A_2\int_a^b \mathring{\eta}_1(t)\mathring{\zeta}_2(t)G(t)\,dt$$

等デアルカラ、先ヅ次ノ四式ヲ計算スル。

$$\int_a^b \eta_i(t)\zeta_j(t)G(t)\,dt=a_{ij} \qquad \begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}$$

定理 6 ニヨレバ

$$\Gamma(\mathring{y}_i)-\mathring{z}_i \qquad\qquad i=1,2$$

之ヲ詳シク書キ、両辺ヲ $b(x)$ ニテ除スレバ

$$\mathring{\eta}_i(x)+\int_a^x\left\{\mathring{\zeta}_1(x)\mathring{\zeta}_2(t)-\mathring{\zeta}_2(x)\mathring{\zeta}_1(t)\right\}\mathring{\eta}_i(t)G(t)\,dt=\mathring{\zeta}_i(x) \quad \text{------ (7)}$$

$x=b$ ト置ケバ

$$\mathring{\eta}_i(b)+\mathring{\zeta}_1(b)a_{i2}-\mathring{\zeta}_2(b)a_{i1}=\mathring{\zeta}_i(b) \quad \text{------------------ (8)}$$

(7) ヲ微分シテ $x=b$ ト置ケバ

$$\mathring{\eta}_i'(b)+\mathring{\zeta}_1'(b)\,a_{i2}-\mathring{\zeta}_2'(b)\,a_{i1}=\mathring{\zeta}_i'(b) \quad \text{--------(9)}$$

(8), (9)ヲ解イテ a_{ij} ヲ求ムレバ

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta_1' & \zeta_1' \end{vmatrix} \qquad & a_{12} &= 1+\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \zeta_2' \end{vmatrix} \\ a_{21} &= -1+\begin{vmatrix} \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta_2' & \zeta_1' \end{vmatrix} \qquad & a_{22} &= \begin{vmatrix} \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta_2' & \zeta_2' \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \text{-----(10)}$$

デアル、但シ簡単ノ為メ

$$\begin{aligned} \mathring{\eta}_i(b) &= \eta_i \qquad & \mathring{\eta}_i'(b) &= \eta_i' \\ \mathring{\zeta}_i(b) &= \zeta_i \qquad & \mathring{\zeta}_i'(b) &= \zeta_i' \end{aligned} \qquad i=1,2$$

ト書クコトトシタ。

a_{ij} ハ上述ノ如ク行列式デ表ハサレルが，之レヲ用フレバ（$\alpha\mathring{z}_1$）-1，（$\alpha, \mathring{z}_2$）等モ亦行列式デ表ハスコトが出来ル。

$$(\alpha\mathring{z}_1)-1=\left(A_1-\tfrac{1}{2}\right)a_{21}+A_2\,a_{11}-1$$

$$=\left(A_1-\tfrac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta_2' & \zeta_1' \end{vmatrix}+A_2\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta_1' & \zeta_1' \end{vmatrix}+\left(A_1+\tfrac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{vmatrix}$$

$$(\alpha\mathring{z}_1)-1=\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1' \end{vmatrix} \quad \text{-------------(11)}$$

同様ニ

$$(\alpha \mathring{z}_2) = \begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_2' \end{vmatrix} \quad \text{-------------} \quad (12)$$

$$(\beta \mathring{z}_1) = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & A_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1' \end{vmatrix} \quad \text{-------------} \quad (13)$$

$$(\beta \mathring{z}_2)-1 = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & -(A_1-\frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_2' \end{vmatrix} \quad \text{-------------} \quad (14)$$

(11), (12), (13), (14) ノ四式ヲ観察スレバ，此等ハ行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & A_3 & -(A_1-\frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1' & \zeta_2' \end{vmatrix}$$

ノ minors ニナッテ居ル。

即チ Δ ノ第 i 行第 j 列ノ余因子ヲ A_{ij} ト書ケバ，(11), (12), (13), (14) ヨリ

$$(\alpha \mathring{z}_1)-1 = A_{42} \qquad (11')$$

$$(\alpha \mathring{z}_2) = -A_{32} \qquad (12')$$

$$(\beta\mathring{z}_1) \quad = -A_{41} \tag{13'}$$

$$(\beta\mathring{z}_2) - 1 = A_{31} \tag{14'}$$

ヲ得ル。

故ニ

$$D = \begin{vmatrix} (\alpha z_1)-1 & (\alpha z_2) \\ (\beta z_1) & (\beta z_2)-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{42} & -A_{32} \\ -A_{41} & A_{31} \end{vmatrix} = \Delta : \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{vmatrix}$$

$$= -\Delta$$

以上ヨリ定理7ニ依リ次ノ定理ヲ得ル。

定理9. 積分方程式

$$v(x) = \int_{a(c)}^{x} \left\{ \mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t) - \mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t) \right\} \sqrt{G(x)G(t)}\, v(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a(c)}^{b} \left\{ \mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t) - \mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t) \right\} \sqrt{G(x)G(t)}\, v(t)\,dt$$

$$+\int_{a(c)}^{b} \Big[A_1 \left\{ \mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t) + \mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t) \right\} + A_2\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_1(t)$$

$$+ A_3\,\mathring{\eta}_2(x)\,\mathring{\eta}_2(t) \Big] \sqrt{G(x)G(t)}\; v(t)\;dt \tag{3'}$$

ガ $v = 0$ 以外ノ解ヲ有スルタメノ完全ナル條件ハ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1' & \zeta_2' \end{vmatrix} = 0$$

デアッテ、之ガ満足サレル場合ノ解ハ

$$v(x)=C_1\sqrt{G(x)}\left(\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1' \end{vmatrix}\mathring{\zeta}_2(x)-\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_2' \end{vmatrix}\mathring{\zeta}_1(x)\right)$$

及ビ

$$v(x)=C_2\sqrt{G(x)}\left(\begin{vmatrix} A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & A_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1' \end{vmatrix}\mathring{\zeta}_2(x)-\begin{vmatrix} A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & -(A_1-\frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_2' \end{vmatrix}\mathring{\zeta}_1(x)\right)$$

ノ内恒等的ニ零デナイモノガアレバ、之デ表ハサレル。而シテ両式ガ恒等的ニ零デアル場合ニハ

$$v(x)=C_1\sqrt{G(x)}\,\zeta_1(x)+C_2\sqrt{G(x)}\,\zeta_2(x)$$

ガ解デアル。但シ C_1 及 C_2 ハ任意常数デアッテ

$$\eta_i=\mathring{\eta}_i(b),\quad \zeta_i=\mathring{\zeta}_i(b),\quad \eta_i'=\mathring{\eta}_i'(b),\quad \zeta_i'=\mathring{\zeta}_i'(b)$$

デアル。

3. 簡単ナ例ニツイテ定理9ヲ説明スル。

例. $y''=0$ ナル微分方程式ノ二解カラ $a=0$, $b=1$ トシテ $\mathring{\eta}_1(x)$ 及 $\mathring{\eta}_2(x)$ ヲ計算スレバ

$$\mathring{\eta}_1(x)=x \qquad \mathring{\eta}_2(x)=1$$

デアル、而シテ $G(x)=-\lambda$ トスレバ定理9ノ積分方程式ハ

$$v(x)=-\lambda\int_0^x(x-t)\,v(t)\,dt+\frac{\lambda}{2}\int_0^1(x-t)\,v(t)\,dt$$

$$-\lambda\int_0^1\{A_1(x+t)+A_2xt+A_3\}v(t)\,dt$$

トナル、之ガ固有解ヲ有スル條件ハ$\left(\mathring{\zeta}_1(x)=\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}},\right.$
$\left.\mathring{\zeta}_2(x)=\cos\sqrt{\lambda}\,x\right.$ デアルカラ$\left.\right)$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & A_3 & -(A_1-\frac{1}{2}) \\ 1 & 1 & \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & \cos\sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & \cos\sqrt{\lambda} & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$=2\left(A_1^2-A_2A_3-\frac{1}{4}\right)-A_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

$$-\left(A_1^2-A_2A_3+\frac{1}{4}+A_1+A_3\right)\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}$$

$$-\left(2A_1^2-2A_2A_3+\frac{1}{2}-A_2\right)\cos\sqrt{\lambda}=0$$

デアル。固有値λハ此方程式ノ根デアル。

而シテ解ハ一般ニ

$$v(x)=C_1\left\{\Delta_1\cos\sqrt{\lambda}\,x-\Delta_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}\right\} \qquad \text{(i)}$$

$$v(x)=C_2\left\{\Delta_3\cos\sqrt{\lambda}\,x-\Delta_4\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}\right\} \qquad \text{(ii)}$$

デ表ハサレル。但シ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ 1 & 0 & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= (\cos\sqrt{\lambda} - 1) A_1 + \left(\cos\sqrt{\lambda} - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right) A_2 - \frac{1}{2}(1 + \cos\sqrt{\lambda}) \cdots \text{(iii)}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ 1 & 1 & \cos\sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\; A_1 + (1 - \cos\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}) \cdot A_2$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iv)}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 \\ 1 & 1 & \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ 1 & 0 & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\cos\sqrt{\lambda} - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right) A_1 + (\cos\sqrt{\lambda} - 1) A_3$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\cos\sqrt{\lambda} - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right) \cdots\cdots \text{(v)}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ 1 & 1 & \cos\sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \cos\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}) A_1 - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\; A_3$$

$$- \frac{1}{2}(1 + \cos\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}) \cdots\cdots \text{(vi)}$$

デアル。

次ニ (i) (ii) ノ両式ガ恒等的ニ零トナル場合ヲ考ヘル。

$$\Delta_1=0,\quad \Delta_2=0,\quad \Delta_3=0,\quad \Delta_4=0$$

ノ四式カラ A_1, A_2, A_3 ヲ消去シタ行列式ヲ実際ニ計算スルト, λ ノ如何ニ拘ラズ零トナル。故ニ此等四方程式ノ適当ノ三者カラ A_1, A_2, A_3 ヲ λ ノ項デ算出ガ出來ル。即チ

$$A_1=\frac{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}{2(2-2\cos\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}$$

$$A_2=-\frac{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}{2-2\cos\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}$$

$$A_3=\frac{\cos\sqrt{\lambda}-\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}}{2-2\cos\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}$$

デアル、而シテ A_1 A_2 A_3 ガ λ ＝拘ラズ一定デアルタメニハ

$$\sin\sqrt{\lambda}=0 \qquad \cos\sqrt{\lambda}=-1$$

ナルコトヲ要スル。 故ニ

$$A_1=0 \qquad A_2=0 \qquad A_3=-\frac{1}{4}$$

$$\lambda=(2n+1)^2\pi^2 \qquad (n\text{ハ整数})$$

ヲ得ル。

故ニ積分方程式ハ

$$v(x)=-\frac{\lambda}{2}\int_0^1\left\{|x-t|-\frac{1}{2}\right\}v(t)\,dt$$

トナリ、其ノ固有解ハ $\lambda=(2n+1)^2\pi^2$ ニ對シ

$$C_1\sin(\overline{2n+1}\,\pi x)+C_2\cos(\overline{2n+1}\,\pi x)$$

トナル、但シ n ハ任意ノ整数デアル。

最後ニ A_1 A_2 A_3 ニ特別ナ値ヲ與ヘタ場合ヲ計算スル。

(i) $A_1=-\frac{1}{2}$, $A_2=A_3=0$

トスレバ、核ハ

$$k(x,t)=x \qquad x<t<1$$

$$k(x,t)=t \qquad 0<t<x$$

トナリ、固有値ノ方程式ハ

$$\cos\sqrt{\lambda}=0, \qquad \lambda=\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2$$

固有函數ハ $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$ トナル。

(ii) $A_1=A_2=A_3=0$

トスレバ、積分方程式ハ

$$v(x)=-\frac{\lambda}{2}\int_0^1 |x-t|\,v(t)\,dt$$

トナリ、固有値ノ方程式ハ

$$1+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+\cos\sqrt{\lambda}=0$$

即チ $$\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^2\left(1+\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\,tg\,\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)=0$$

トナル。而シテ固有解ハ

$$v=c_1\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\\ 1 & 0 & \cos\sqrt{\lambda}\end{vmatrix}\cos\sqrt{\lambda}x-c_1\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & 1 & \cos\sqrt{\lambda}\\ 1 & 0 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\end{vmatrix}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$$

$$=c_1\left\{-\frac{1+\cos\sqrt{\lambda}}{2}\cos\sqrt{\lambda}x-\frac{1}{2}\sin\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x\right\}$$

$$v = C_2 \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ p & 0 & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}\,x - C_2 \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \cos\sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}$$

$$= C_2 \left\{ \frac{1}{2}\left(\cos\sqrt{\lambda} - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right) \cos\sqrt{\lambda}\,x \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(1 + \cos\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \right) \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

ノ何レデモ表ハサレルガ，前者ハ $\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$ ノトキ恒等的ニ零トナルカラ、後者ノ方ガ一般的デアル、之レヲ書キ改メルト

$$v = C\left\{ \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\sin\sqrt{\lambda} + 1 \right) \cos\sqrt{\lambda}\,x - \frac{1}{2}\sin\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,x \right\}$$

トナル。

4. 前款デハ對稱核ノ積分方程式 (3') ノ解ヲ述ベタガ、次節ノ應用デハ (3') ニ於テ

$$v(x) = \frac{\sqrt{G(x)}}{b(x)} u(x)$$

ト置イテ得ベキ方程式ガ重要デアル。故ニ定理9.ニ此ノ置換ヲ施シ且ツ結果ヲ $\mathring{y}_i(x)$, $\mathring{v}_i(x)$ デ表ハセバ次ノ定理ヲ得ル。

定理10. 積分方程式

$$u(x) = \int_{a(c)}^{x} K(x,t)\,G(t)\,u(t)\,dt$$

$$+\int_{a(c)}^{b}\left[\mathring{y}_1(x)\left\{\left(A_1-\frac{1}{2}\right)\mathring{y}_2(t)+A_2\mathring{y}_1(t)\right\}\right.$$

$$\left.+\mathring{y}_2(x)\left\{\left(A_1+\frac{1}{2}\right)\mathring{y}_1(t)+A_3\mathring{y}_2(t)\right\}\right]\frac{G(t)}{(b(t))^2}u(t)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots (6')$$

ガ固有解ヲ有スル完全ナル條件ハ

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & A_3 & -(A_1-\frac{1}{2}) \\ \mathring{y}_1(b) & \mathring{y}_2(b) & \mathring{z}_1(b) & \mathring{z}_2(b) \\ \mathring{y}_1'(b) & \mathring{y}_2'(b) & \mathring{z}_1'(b) & \mathring{z}_2'(b) \end{vmatrix}=0$$

デアッテ，解ハ

$$u(x)=C_1\left\{\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2} \\ \mathring{y}_1(b) & \mathring{y}_2(b) & \mathring{z}_1(b) \\ \mathring{y}_1'(b) & \mathring{y}_2'(b) & \mathring{z}_1'(b) \end{vmatrix}\mathring{z}_2(x)-\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ \mathring{y}_1(b) & \mathring{y}_2(b) & \mathring{z}_2(b) \\ \mathring{y}_1'(b) & \mathring{y}_2'(b) & \mathring{z}_2'(b) \end{vmatrix}\mathring{z}_1(x)\right\}$$

$$u(x)=C_2\left\{\begin{vmatrix} A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & A_3 \\ \mathring{y}_1(b) & \mathring{y}_2(b) & \mathring{z}_1(b) \\ \mathring{y}_1'(b) & \mathring{y}_2'(b) & \mathring{z}_1'(b) \end{vmatrix}\mathring{z}_2(x)-\begin{vmatrix} A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & -(A_1-\frac{1}{2}) \\ \mathring{y}_1(b) & \mathring{y}_2(b) & \mathring{z}_2(b) \\ \mathring{y}_1'(b) & \mathring{y}_2'(b) & \mathring{z}_2'(b) \end{vmatrix}\mathring{z}_1(x)\right\}$$

ノ内恒等的ニ零デナイモノデ表ハサレル。而シテ此等両式ガ恒等的ニ零デアル場合ニハ

$$u(x)=c_1\mathring{z}_1(x)+c_2\mathring{z}_2(x)$$

ガ解デアル。

（注意）此ノ定理ハ次ノ性質ヲ用フレバ定理9カラ容易ニ

証明シ得ラレル。

$$\mathring{y}_i(x) = b(x)\,\mathring{\eta}_i(x)$$

$$\mathring{y}_i'(x) = b'(x)\,\mathring{\eta}_i(x) + b(x)\,\mathring{\eta}_i'(x)$$